Université Hassan 1er — Année Univ. 2017–2018

FP de Khouribga — Filière: SMIA (S2)

Fiche TD N 1 (Systèmes linéaires, Esapces vectoriels)

Destribuée mardi 13 mars 2018

Responsable: S. NAJIB

I. Systèmes Linéaires

Exercice 1

Par la <u>*méthode de substitution*</u>, puis par la <u>*méthode de Gauss*</u>, résoudre les systèmes linéaires suivants:

$$\begin{cases} 2x+y-2z &= 10 \\ 3x+2y+2z &= 1 \\ 5x+4y+3z &= 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y+z &= 2 \\ 2x+y+z &= -1 \\ x-3y+2z &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+3x_4 &= 1 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4 &= 4 \\ 3x_2+3x_3-3x_4 &= 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4 &= 2 \\ 2x_1-2x_2+2x_3-2x_4 &= 2 \\ -x_1+x_2++2x_3-4x_4 &= 4 \\ -x_3+2x_4 &= -2 \end{cases}$$

Exercice 2

On donne dans $\mathbb{R}$ le système linéaire (S_a) d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x-y+az &= a \\ 2x-y+6z &= a^2+1 \\ 3x-2y+(a+12)z &= a \end{cases}$$

1) Trouver a pour que le système (S_a) soit compatible.
2) Résoudre le système (S_a) pour chacune des valeurs de a trouvées.

Exercice 3

On considère le système linéaire (S) suivant:

$$\begin{cases} x-2y+z &= 4 \\ y-z &= -1 \\ y-3z &= -3 \end{cases}$$

1) Donner la forme matricielle de (S) $(AX = B)$
2) Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
3) Résoudre le système (S).

II. Espaces vectoriels

Exercice 1

On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles les deux lois $\top$ et $*$ suivantes:
Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles $\lambda \in \mathbb{R}$ on a:

$$(U_n)_n \top (V_n)_n = (U_n + V_n)_n$$

et

$$\lambda * (U_n)_n = (\lambda U_n)_n.$$

Montrer que le triplet $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \top, *)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle notée $+$ et de la loi externe définie par:

$$\alpha * (x, y) = (-\alpha x, -\alpha y)$$

Le triplet $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel?

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle: $(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$ et de la multiplication externe par les complexes définie par:

$$(a + ib).(x, y) = (ax - by, ax + by).$$

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. Celui-ci est appelé *complexifié* de E.

Exercice 4

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.
$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ x \leq y\},\ E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/\ x \leq y\}$
$E_3 = \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\ f(1) = 0\},\ E_4 = \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})/\ f \text{ s'annule}\}$
$E_5 = \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\ f \text{ est impaire}\}$, $E_6 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\ (u_n) \text{est bornee}\}$,
$E_7 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\ (u_n) \text{ convergente}\}$.

Exercice 5

Soit $w \in \mathbb{C}$. On note $w.\mathbb{R} = \{wx/\ x \in \mathbb{R}\}$.
1) Montrer que $w.\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

2) A quelle condition $w.\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}-$espace vectoriel?

Exercice 6

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'ensemble:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z + az^2 = b\}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que E soit un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Exercice 7

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
1) Montrer que $F \cap G = F + G \Longleftrightarrow F = G$.
2) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Longleftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 8

Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel E.
1) Comparer $Vect(A \cap B)$ et $Vect(A) \cap Vect(B)$.
2) Montrer que $Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$.
3) Montrer que $Vect(Vect(A) \cup Vect(B)) = Vect(A \cup B)$.

Exercice 9

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$
et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) /\ a, b \in \mathbb{R}\}$.
1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer $F \cap G$.

Exercice 10

On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.
1) $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_3)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2) Même question pour $\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{Vect}(v_2, v_5)$.

Exercice 11

1) Etudier l'indépendance linéaire des familles suivantes dans les espaces vectoriels mentionnés.
$F_1 = \{(3, 2), (3, -2)\}$ dans $(\mathbb{R}^2, +, .)$
$F_2 = \{(3, 2), (3, -2), (1, 1)\}$ dans $(\mathbb{R}^2, +, .)$
$F_3 = \{(1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, -1, 1)\}$ dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$
$F_4 = \{(2, 1, 1, 1), (4, 0, 2, 3), (2, -1, 1, 2)\}$ dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$.
2) Montrer que les vecteurs $(1, 1, 1), (2, 1, 0), (3, 2, 2), (0, 1, 0)$ engendrent $\mathbb{R}^3$. Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants?

Exercice 12

1) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, 2, -1),\ v = (1, 1, 1) \text{ et } w = (0, 1, 1).$$

(a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Décomposer les vecteurs $(3, 4, 5)$ et (x, y, z) dans cette nouvelle base.
2) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels:

$$E = Vect\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$$

et

$$F = Vect\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}$$

Montrer que $E = F$.

Exercice 13

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0 \text{ et } 3x + z = 0\}$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner une base de E. En déduire $\dim E$.
3) Le sous-espace vectoriel E est-il une droite vectorielle, un hyperplan de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 14

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les deux ensembles:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y + t = 0\}$$

et

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 3x + 2z = 0\}$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et donner une base de E.
2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et donner une base de F.
3) Donner une base de $E \cap F$. En déduire $\dim(E \cap F)$.
4) Déterminer $\dim(E+F)$. Les deux espaces E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 15

On considère le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z & = 3 \\ 2x - y + z & = 0 \\ 3x + 2y + 3z & = -1 \end{cases}$$

1) Sans résoudre, l'ensemble des solutions de ce système est-il un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, .)$?

2) Montrer que l'ensemble des solutions du système *homogène* associé à ce système est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Expliciter une base de cet espace, et déterminer sa dimension.

Exercice 16

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\{P \in \mathbb{R}[X]/\ deg(P) \leq 3\}$ et $(1, X, X^2, X^3)$ sa base canonique.

On pose $F = \{P \in E/\ P(1) = P(2) = 0\}$

et $G = \{P \in E/\ P(1) = P'(1) = 0\}$.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2) Montrer que $\{(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)\})$ est une base de F. En déduire la dimension de F.

3) Montrer que $\{(X-1)^2,\ X(X-1)^2\})$ est une base de G. En déduire la dimension de G.

4) Trouver une base et la dimension de $F \cap G$.

5) Calculer la dimension de $F + G$.

Exercice 17

Dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle, on considère les deux ensembles:

$$F = \{f \in E/f \text{ est paire}\}$$

et

$$G = \{f \in E/f \text{ est impaire}\}$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 18

Soit $F = \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\ f(0) + f(1) = 0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.